<u>ΙΞΩΔΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ</u>

Για την παρούσα φάση έχει μέχρι τώρα πραγματοποιηθεί η ανάλυση όσον αφορά τις προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούν οι καταστατικές εξισώσεις ιξωδοελαστικών ρευστών για την εισαγωγή τους στο λογισμικό και η οποία παρατίθεται ακολούθως.

Υποθέτουμε ότι $X(\tau)$ ή απλά X είναι η θέση ενός υλικού σημείου σε χρόνο τ ενώ $X(t)$ ή απλά X_t ο χαρακτηρισμός του ίδιου σημείου βάσει της θέσης του την χρονική στιγμή t. Θεωρούμε ότι t είναι παρόν χρόνος παρατήρησης ενώ το τ χαρακτηρίζει παρελθούσες στιγμές. Η τροχιά του υλικού σημείου X_t θα είναι:

$$X(\tau) = f(X_t\,,\, \tau)$$

και η ταχύτητά του:

$$V = \dot{X} = \frac{\partial f}{\partial \tau}\,.$$

Η $f(X_t\,,\,\tau)$ ονομάζεται επίσης συνάρτηση κίνησης διότι εκφράζει τη τροχιά όλων των υλικών σημείων X_t. Αν την χρονική στιγμή t έχουμε δύο υλικά σημεία X_t και X_t+dX_t ενώ την χρονική στιγμή τ βρίσκονται στα σημεία X και X+dX αντίστοιχα τότε η παράγωγος παραμόρφωσης ορίζεται ως:

$$dX = F_t(\tau)\cdot X_t. \tag{1}$$

Για κάθε τ το $F_t(\tau)$ ή $F(\tau)$ ή απλά F εξαρτάται από την στιγμή αναφοράς t και έτσι αναφέρεται ως σχετικός τανυστής (relative tensor).

Μια καταστατική εξίσωση, η οποία δίνεται ως

$$f\left(\overline{\tau}, \dot{\overline{\tau}}, \ddot{\overline{\tau}}, \ldots\right) = g\left(\overline{D}, \dot{\overline{D}}, \ddot{\overline{D}}, \ldots\right)$$

όπου $\overline{\tau}$ ο τανυστής διατμητικής τάσης ενώ $\overline{D}$ ο τανυστής ρυθμού διάτμησης που ορίζεται ως

$$\overline{D} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^{T}\right)$$

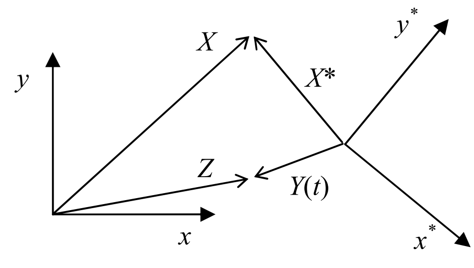
με V=[u, v, w], πρέπει να ικανοποιεί το principle of material objectivity δηλαδή να είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιείται. Το σύστημα αναφοράς αλλάζει με την βοήθεια του πίνακα Q που είναι ορθογώνιος. Αν a και b είναι δύο διανύσματα τότε η αλλαγή του συστήματος δίνει

$$(Q \cdot a) \cdot (Q \cdot b) = b \cdot Q^{\mathrm{T}} \cdot (Q \cdot a) = b \cdot a$$

δηλαδή τα καινούργια διανύσματα έχουν το ίδιο εσωτερικό γινόμενο γι αυτό και το Q μπορεί να οριστεί ως ο τανυστής που μετασχηματίζει δύο διανύσματα σε διανύσματα ίσου μήκους που έχουν την ίδια γωνία μεταξύ τους. Ένα σημείο X στο καινούργιο σύστημα συντεταγμένων (*) εκφράζεται ως

$$X^{*} - Y(\mathrm{t}) = Q(\mathrm{t}) \cdot (X - Z), \tag{2}$$

όπου Q εκφράζει την περιστροφή και Y(t)–Z,την σχετική μετακίνηση (Σχ. 1).



Σχήμα 1. Μετασχηματισμός του X από το σταθερό σύστημα αναφοράς στο κινούμενο

Η έκφραση μετασχηματισμού ‘γεωμετρικών’ διανυσμάτων ως διαφοράς επιβατικών ακτινών X_1 και X_2 δίνεται από την (2) εκπεφρασμένη για X_1^* και X_2^* και αφαιρώντας

$$X_1^{*} - X_2^{*} = Q(t) \cdot (X_1 - X_2) \Leftrightarrow dX^{*} = Q(t)\cdot dX. \tag{3}$$

Όποιο διάνυσμα μετασχηματίζεται ως γεωμετρικό καλείται indifferent δηλαδή $a^{*} = Q(t) \cdot a$. Αν $b = A \cdot a$ τότε αποδεικνύεται ότι $b^{*} = (Q(t) \cdot A \cdot Q^{\mathrm{T}}(t)) \cdot a^{*}$ οπότε ο

$$A^{*} = Q(t) \cdot A \cdot Q^{\mathrm{T}}(t) \tag{4}$$

μπορεί να θεωρηθεί ο μετασχηματισμός του A και όποιος τανυστής μετασχηματίζεται σύμφωνα με την (4) καλείται indifferent.

Αν θέλουμε να εκφράσουμε την (1) σε άλλο σύστημα αναφοράς τότε χρησιμοποιώντας την (3) έχουμε

$$dX^{*} = Q(\tau)\cdot dX = Q(\tau)\cdot F_t(\tau)\cdot dX_t = Q(\tau)\cdot F_t(\tau)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t)\cdot dX_t^{*}$$

και άρα ο μετασχηματισμός του F είναι

$$F_t^{*}(\tau) = Q(\tau)\cdot F_t(\tau)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t)$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$F_t^{-1*}(\tau) = Q(t)\cdot F_t^{-1}(\tau)\cdot Q^{\mathrm{T}}(\tau) \tag{5}$$

Αν ο F εκφραστεί ως γινόμενο μιας περιστροφής R και μιας διάτμησης U, όπου R ορθογώνιος και U συμμετρικός, τότε $F = R\cdot U$ και άρα

$$F_t^{*}(\tau) = Q(\tau)\cdot R\cdot U\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) = Q(\tau)\cdot R\cdot Q^{\mathrm{T}}(t)\cdot Q(t)\cdot U\cdot Q^{\mathrm{T}}(t).$$

Άρα εάν $F_t^{*}(\tau) = R^{*}\cdot U^{*}$ τότε

$$R^{*} = Q(\tau)\cdot R\cdot Q^{\mathrm{T}}(t)\ ,\ U^{*} = Q(t)\cdot U\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) \tag{6}$$

και βάσει του ορισμού της (4 27) ο U μπορεί να χαρακτηριστεί indifferent ενώ οι F, F^{-1} και R όχι. Σημειώνεται ότι οι τρεις προαναφερθέντες πίνακες είναι σχετικοί (relative) δηλαδή έχουν σαν αναφορά την στιγμή παρατήρησης t.

1. Μετασχηματισμοί Παραγώγων

Αν J ένας indifferent πίνακας εξαρτώμενος από το t τότε

$$J^{*}(t) = Q(t)\cdot J(t)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t)$$

και άρα η παράγωγος του θα είναι

$$\dot{J}^{*}(t) = \dot{Q}(t)\cdot J(t)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) + Q(t)\cdot \dot{J}(t)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) + Q(t)\cdot J(t)\cdot \dot{Q}^{\mathrm{T}}(t)$$

και άρα η χρονική παράγωγος ενός χρονικά εξαρτώμενου indifferent, μη σχετικού (non-relative) πίνακα δεν είναι indifferent.

Αν ο πίνακας είναι σχετικός τότε

$$J^{*}(\tau) = Q(t)\cdot J(\tau)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t)$$

και άρα η παράγωγος ως προς τα είναι

$$\dot{J}^{*}(\tau) = Q(t)\cdot \dot{J}(\tau)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t)$$

και για τ=t

$$\dot{J}^{*}(t) = Q(t)\cdot \dot{J}(t)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) \quad \text{με} \quad \dot{J}(t) = \left.\frac{dJ}{d\tau}\right|_{\tau=t}$$

και άρα η χρονική παράγωγος για τ=t ενός σχετικού και indifferent πίνακα είναι indifferent.

2. Associated Σχετικοί Πίνακες και Associated Παράγωγοι

Λόγω του ότι πρέπει να ορίσουμε indifferent παραγώγους, μας προκύπτει ότι πρέπει να συσχετίσουμε με έναν χρονικά εξαρτώμενο, indifferent, μη σχετικό τανυστή, έναν indifferent, σχετικό τανυστή του οποίου η τιμή για τ=t ισούται με J τότε οι τρεις πιο γνωστοί τρόποι για να το κάνουμε είναι

i) Corrotated έκφραση

Αυτή ορίζεται ως

$$\widetilde{J}(\tau) = R^{\mathrm{T}}(\tau)\cdot J(\tau)\cdot R(\tau) \tag{7}$$

με $\widetilde{J}(t) = J(t)$ διότι $R(t)$=I λόγω του ότι ο R είναι σχετικός.

Η έκφραση σε άλλο σύστημα αναφοράς βάσει της (7 38) είναι

$$\widetilde{J}^{*}(\tau) = R^{\mathrm{T}*}(\tau)\cdot J^{*}(\tau)\cdot R^{*}(\tau).$$

Άρα βάσει της (6) αποδεικνύεται ότι

$$\widetilde{J}^*(\tau) = Q(t)\cdot R^{\mathrm{T}}(\tau)\cdot J(\tau)\cdot R(\tau)\cdot Q^{\mathrm{T}}(t) \tag{8}$$

και άρα ο $\widetilde{J}(\tau)$ είναι indifferent σχετικός τανυστής.

Λόγω του ότι για τ=t βάσει του ορισμού του F ισχύει ότι $\dot{F} = \nabla V$, αποδεικνύεται ότι:

$$\dot{R}(t) = W(t),\ \dot{U}(t) = \frac{D}{2}$$

όπου $W(t)$=$(\nabla V$-$\nabla V^{\mathrm{T}})/2$ και άρα $W^{\mathrm{T}}(t)$=-$W(t)$ και επίσης D συμβολίζει το $\overline{D}$ για λόγους απλούστευσης.

Η παράγωγος της corrotated έκφρασης είναι

$$\left.\frac{d\widetilde{J}}{d\tau}\right|_{\tau=t} = \left[\frac{dR^{\mathrm{T}}}{d\tau}\cdot J(\tau)\cdot R + R^{\mathrm{T}}\cdot\frac{dJ(\tau)}{d\tau}\cdot R + R^{\mathrm{T}}\cdot J(\tau)\cdot\frac{dR}{d\tau}\right]_{\tau=t}$$

και άρα λόγω της (8 41) και του $R(t)$=I έχουμε

$$\left.\frac{d\widetilde{J}}{d\tau}\right|_{\tau=t} \equiv \overset{o}{J} = \dot{J} - W\cdot J + J\cdot W\ . \tag{9}$$

Με παρόμοιο συλλογισμό όπως και για την λήψη της (8) αποδεικνύεται ότι και η έκφραση $\overset{o}{J}$ είναι indifferent.

ii) Upper Convected έκφραση

Αυτή ορίζεται ως

$$\overset{\uparrow}{J}(\tau) = F^{-1}(\tau)\cdot J(\tau)\cdot\left(F^{-1}(\tau)\right)^{\mathrm{T}}$$

με $\overset{\uparrow}{J}(\tau) = J(t)$ διότι $F^{-1}(t)$=I λόγω του ότι ο F^{-1} είναι σχετικός.

Η έκφραση σε άλλο σύστημα αναφοράς βάσει της (7 38) είναι

$$\overset{\uparrow}{J}^*(\tau) = F^{*-1}(\tau)\cdot J^*(\tau)\cdot\left(F^{*-1}(\tau)\right)^{\mathrm{T}}.$$

Άρα βάσει της (5) αποδεικνύεται ότι

$$\overset{\uparrow}{J}^*(\tau) = Q(t)\cdot F^{-1}(\tau)\cdot J(\tau)\cdot\ \left(F^{-1}(\tau)\right)^{\mathrm{T}}\cdot Q^{\mathrm{T}}(t)$$

και άρα ο $\overset{\uparrow}{J}^*(\tau)$ είναι indifferent σχετικός τανυστής.

Με παρόμοιο συλλογισμό όπως και για την corrotated έκφραση, λαμβάνεται η παράγωγος της upper convected έκφρασης που είναι

$$\left.\frac{d\overset{\uparrow}{J}}{d\tau}\right|_{\tau=t} \equiv \overset{\nabla}{J} = \dot{J} - \nabla V\cdot J - J\cdot\nabla V^{\mathrm{T}}$$

ή ισοδύναμα σύμφωνα με την (9)

$$\overset{\nabla}{J} = \overset{o}{J} - D\cdot J - J\cdot D\ .$$

Με παρόμοιο συλλογισμό όπως corrotated παράγωγο αποδεικνύεται ότι και η έκφραση $\overset{\nabla}{J}$ είναι indifferent.

iii) Lower Convected έκφραση

Αυτή ορίζεται ως

$$\overset{\downarrow}{J}(\tau) = F^{\mathrm{T}}(\tau)\cdot J(\tau)\cdot F(\tau)$$

και με βάση παρόμοιο συλλογισμό όπως παραπάνω προκύπτει η παράγωγος

$$\left.\frac{d\overset{\downarrow}{J}}{d\tau}\right|_{\tau=t} \equiv \overset{\Delta}{J} = \dot{J} + \nabla V^{\mathrm{T}}\cdot J + J\cdot\nabla V$$

ή ισοδύναμα

$$\overset{\Delta}{J} = \overset{o}{J} + J \cdot D + D \cdot J \tag{51}$$

η οποία αποδεικνύεται επίσης ότι είναι indifferent.