

ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ

1. Διακριτοποίηση Εξισώσεων

Η μηχανική των ρευστών διέπεται από τις εξισώσεις Navier-Stokes. Αυτές αποτελούνται από την εξίσωση συνέχειας

$$\int_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1)$$

όπου $\mathbf{V}=[u, v, w]^T$, με u, v και w τις συνιστώσες ταχύτητας κατά την x, y και z κατεύθυνση αντίστοιχα και τις εξισώσεις ορμής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u d\Omega + \int_S \rho u \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S p i_x \cdot d\mathbf{S} + \int_S (\tau_{xx} i_x + \tau_{xy} i_y + \tau_{xz} i_z) \cdot d\mathbf{S} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho v d\Omega + \int_S \rho v \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S p i_y \cdot d\mathbf{S} + \int_S (\tau_{yx} i_x + \tau_{yy} i_y + \tau_{yz} i_z) \cdot d\mathbf{S} \quad (2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho w d\Omega + \int_S \rho w \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S p i_z \cdot d\mathbf{S} + \int_S (\tau_{zx} i_x + \tau_{zy} i_y + \tau_{zz} i_z) \cdot d\mathbf{S} \quad (2c)$$

για τα x, y και z αντίστοιχα. Το $d\mathbf{S}$ ισοδυναμεί με $\mathbf{n}dS$ (όπου \mathbf{n} το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια dS) και i_x, i_y, i_z είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις x, y και z αντίστοιχα.

Μια τυπική υπολογιστική κυψέλη για ομόθετη ευθέτηση των μεταβλητών φαίνεται στο Σχήμα 1. Αποτελείται από ένα κεντρικό Όγκο Ελέγχου (OE) με κέντρο P και τους γειτονικούς OE με κέντρα T, B, E, W, N και S. Τα κέντρα των έξι παρειών του κεντρικού OE ανάλογα με την θέση τους σημειώνονται ως t, b, e, w, n και s . Για την διαδικασία διακριτοποίησης, τα ογκικά ολοκληρώματα στις εξισώσεις (1) και (2) εφαρμόζονται σε κάθε OE ενώ τα επιφανειακά ολοκληρώματα διασπώνται σε έξι ολοκληρώματα, ένα σε κάθε παρειά. Η ανάλυση που ακολουθεί επικεντρώνεται στην έκφραση των εξισώσεων (1) και (2a) στην παρειά 'e' ενώ οι αντίστοιχες εκφράσεις στις υπόλοιπες παρείες για αυτές τις εξισώσεις όπως και για την (2b) λαμβάνονται κατά τον ίδιο τρόπο.

Εφόσον το αριθμητικό σχήμα είναι πεπλεγμένο, οι εξισώσεις πρέπει να επιλυθούν με επαναληπτική μέθοδο. Συνεπώς το σύστημα εξισώσεων που θα δημιουργηθεί θα είναι γραμμικό με αγνώστους τις κομβικές τιμές της ταχύτητας στην καινούργια επανάληψη m . Κατά την επανάληψη m , οι μη γραμμικοί όροι προσεγγίζονται από το γινόμενο της τιμής από την προηγούμενη επανάληψη (δείκτης $m-1$) και της 'νέας' τιμής (για την οποία ο δείκτης m αγνοείται).

Η διακριτοποιημένη έκφραση της (1) για την παρειά 'e' έχει ως

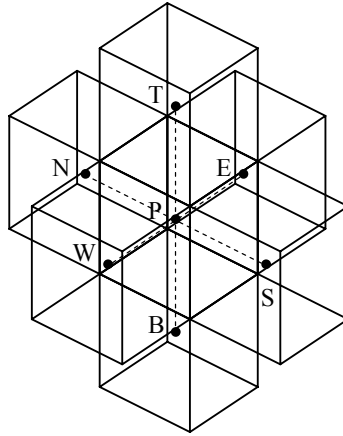
$$\int_{S_e} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \dot{m}_e \approx u_e^{m-1} S_e \quad (3)$$

όπου u_e^{m-1} υπολογίζεται με γραμμική παρεμβολή μεταξύ u_p^{m-1} και u_E^{m-1} .

Ο όρος μη μονιμότητας της (2) διακριτοποιείται ως

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u d\Omega \approx \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} (u_p - u_p^n) \quad (4)$$

όπου n υποδηλώνει το προηγούμενο χρονικό βήμα και η αντίστοιχη τιμή συγκαταλέγεται στους όρους πηγής.



Σχήμα 1. Υπολογιστική κυψέλη ομόθετης ευθέτησης μεταβλητών

Για τον όρο συναγωγής της (2), η έκφραση της ταχύτητας u στην παρειά προϋποθέτει ένα σχήμα παρεμβολής. Το σχήμα που θα αναπτυχθεί για τις ανάγκες διακριτοποίησης του όρου συναγωγής είναι το σχήμα QUICK (Leonard, 1979) το οποίο είναι 3^{ου} βαθμού ακριβείας και συνεπώς θα μειώσει το πρόβλημα της αριθμητικής διάχυσης που εμφανίζεται έντονα στο πρώτου βαθμού ακριβείας σχήμα UDS (Upwind Differencing Scheme):

$$u_e^{UDS} = \begin{cases} u_P & \text{if } \dot{m}_e > 0 \\ u_E & \text{if } \dot{m}_e < 0 \end{cases} \quad (5)$$

Σε αντίθεση με το παραπάνω, το σχήμα QUICK εμπλέκει τρεις κομβικές τιμές της προς παρεμβολή μεταβλητής και συνεπώς θεωρείται μια εκτεταμένη υπολογιστική (Σχήμα 2). Για την παρειά 'e' το σχήμα παρεμβολής είναι:

$$u_e^{QUICK} = \begin{cases} u_P + C_1^+ (u_P - u_W)^{m-1} + C_2^+ (u_E - u_P)^{m-1} & \text{if } \dot{m}_e > 0 \\ u_P + C_1^- (u_E - u_{EE})^{m-1} + C_2^- (u_P - u_E)^{m-1} & \text{if } \dot{m}_e < 0 \end{cases} \quad (6)$$

όπου

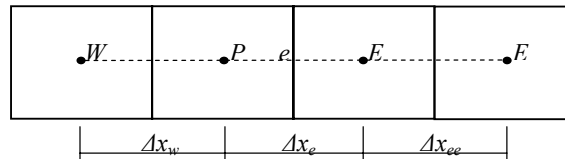
$$C_1^+ = \frac{\Delta x_e^2}{4(\Delta x_w + \Delta x_e)\Delta x_w}, \quad C_1^- = \frac{\Delta x_e^2}{4(\Delta x_e + \Delta x_{ee})\Delta x_{ee}},$$

$$C_2^+ = \frac{2\Delta x_w + \Delta x_e}{4(\Delta x_w + \Delta x_e)}, \quad C_2^- = \frac{2\Delta x_{ee} + \Delta x_e}{4(\Delta x_e + \Delta x_{ee})}$$

Συνεπώς η διακριτοποιημένη μορφή του όρου συναγωγής είναι

$$\int_{S_e} \rho u \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} \approx \rho u_e^{QUICK} \dot{m}_e \quad (7)$$

όπου όλοι οι όροι εκτός από τον πρώτο (u_P) στην (6) συγκαταλέγονται στους όρους πηγής.



Σχήμα 2. Υπολογιστική κυψέλη σχήματος παρεμβολής QUICK

Ο όρος πίεσης της (2a) για ολόκληρο τον ΟΕ διακριτοποιείται ως

$$-\int_S p \mathbf{i}_x \cdot d\mathbf{S} = -\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega \approx -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_p \Delta\Omega \quad (8)$$

Ο όρος αυτός συγκαταλέγεται στους όρους πηγής.

Η διακριτοποιημένη έκφραση για τον όρο διάχυσης της (2a) για την παρειά 'e' είναι:

$$\begin{aligned} & \int_{S_e} (\tau_{xx} \mathbf{i}_x + \tau_{xy} \mathbf{i}_y + \tau_{xz} \mathbf{i}_z) \cdot d\mathbf{S} = \\ & = \int_{S_e} \mu \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{S_e} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right] \cdot \mathbf{n} dS \quad (9) \\ & \approx \mu_e \frac{u_E - u_P}{PE} S_e + \mu_e \left\{ \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_e S_e^x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_e S_e^y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)_e S_e^z \right] - \int_{S_e} \frac{\partial u}{\partial \xi} dS \right\}^{m-1} \end{aligned}$$

όπου ξ/PE και ο άνω δείκτης στις επιφάνειες S υποδηλώνει συνιστώσα επιφάνειας προς αυτή την κατεύθυνση π.χ. $S_e^x = \mathbf{i}_x \cdot \mathbf{S}_e$. Οι τιμές του μ υπολογίζονται από αντίστοιχες εκφράσεις των καταστατικών εξισώσεων. Οι όροι εντός παρένθεσης με άνω δείκτη $m-1$ συγκαταλέγονται στους όρους πηγής.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η εξίσωση (2a) όταν εφαρμοστεί για τον ΟΕ με κέντρο P και διακριτοποιηθεί λαμβάνει την μορφή

$$A_p^x u_p + \sum_i A_i^x u_i = Q_p^x, \quad i=T, B, E, W, N, S \quad (10)$$

όπου A_i οι συντελεστές των αγνώστων και Q_p οι όροι πηγής. Η διακριτοποιημένη μορφή των (2b) και (2c) λαμβάνεται κατά τον ίδιο τρόπο δίνοντας:

$$A_p^y v_p + \sum_i A_i^y v_i = Q_p^y, \quad i=T, B, E, W, N, S \quad \text{και} \quad (11)$$

$$A_p^z w_p + \sum_i A_i^z w_i = Q_p^z, \quad i=T, B, E, W, N, S \quad (12)$$

αντίστοιχα.

2. Αριθμητική Μέθοδος Επίλυσης

Για την επίλυση του πεδίου ταχυτήτων και πίεσης εφαρμόζεται η μέθοδος SIMPLE. Στο πρώτο βήμα της μεθόδου υποτίθεται ένα αρχικό πεδίο πίεσης (p^{m-1}) και ταχυτήτων ($u^{m-1}, v^{m-1}, w^{m-1}$). Ακολούθως οι διακριτοποιημένες εκφράσεις (10)-(12) των εξισώσεων ορμής επιλύονται χρησιμοποιώντας το υποτιθέμενο πεδίο για να δώσουν τις τιμές u^*, v^*, w^* . Οι τιμές αυτές αν δεν ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας πρέπει να διορθωθούν ως εξής

$$u^m = u^* + u', \quad v^m = v^* + v', \quad w^m = w^* + w'. \quad (13)$$

Αυτό είναι δυνατόν αν και η πίεση διορθωθεί ως $p^m = p^{m-1} + p'$. Σύμφωνα με τη χρησιμοποιούμενη μέθοδο, η έκφραση της u'_e είναι

$$u'_e = \tilde{u}'_e - C_e (p'_E - p'_P) S_e \quad (14)$$

όπου

$$\tilde{u}'_e = \bar{u}_e^m - \bar{u}_e^* + C_e \left[\left(\int_S p \mathbf{i}_x \cdot d\mathbf{S} \right)^m - \left(\int_S p \mathbf{i}_x \cdot d\mathbf{S} \right)^{m-1} \right] \quad (15)$$

και όπου η μπάρα $(\bar{\quad})$ υποδηλώνει τιμές παρεμβολής μεταξύ των αντίστοιχων τιμών στα σημεία P και E. Ο συντελεστής C εμπεριέχει στοιχεία της γεωμετρίας των ΟΕ P και E.

Οι διορθωμένες τιμές της ταχύτητας πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας. Αν η ροή μάζας δια μέσου της παρειάς 'e' είναι

$$\dot{m}_e = u_e^m S_e \quad (16)$$

τότε οι αντίστοιχες εκφράσεις για τις υπόλοιπες παρειές του CV P δίνουν

$$\sum_c \dot{m}_c = \Delta \dot{m}^* + \Delta \dot{m}' = 0, \quad c=t, b, e, w, n, s \quad (17)$$

όπου

$$\sum_c v_c^* S_c = \Delta \dot{m}^*, \quad \sum_c v_c' S_c = \Delta \dot{m}', \quad c=t, b, e, w, n, s \quad (18)$$

όπου $v=u$ όταν $c=e$ ή w , $v=v$ όταν $c=n$ ή s και $v=w$ όταν $c=t$ ή b . Αντικαθιστώντας την (16) στην (17) με τους όρους v_c' όπως στην (14) λαμβάνεται

$$A_p p_p' + \sum_i A_i p_i' = -\Delta \dot{m}^* - \sum_c \bar{v}_c' S_c, \quad i=T, B, E, W, N, S, \quad c=t, b, e, w, n, s. \quad (19)$$

όπου A οι συντελεστές αγνώστων που προκύπτουν από την αντικατάσταση. Οι τελευταίοι όροι του δεξιού μέλους της (19) αμελούνται διότι οδηγούν εμπλοκή όρων διόρθωσης σε κόμβους πέρα από P, T, B, E, W, N και S και επίσης διότι εμπλέκουν διορθώσεις ταχύτητας που δεν είναι ακόμη γνωστές. Αυτό οδηγεί στην εξίσωση διόρθωσης πίεσης

$$A_p p_p' + \sum_i A_i p_i' = -\Delta \dot{m}^*, \quad i=E, W, N, S. \quad (20)$$

Εφαρμόζοντας την (20) σε όλους τους ΟΕ λαμβάνεται ένα σύστημα εξισώσεων η επίλυση του οποίου δίνει της διορθώσεις της πίεσης σε όλους τους κόμβους. Αυτές οι διορθώσεις χρησιμοποιούνται ακολούθως για την διόρθωση των τιμών των ταχυτήτων οι οποίες θα ικανοποιούν έτσι την εξίσωση συνέχειας. Δεν θα ικανοποιούν όμως τις εξισώσεις ορμής οπότε ακολουθεί άλλη επανάληψη χρησιμοποιώντας την λύση της προηγούμενης ως αρχικό πεδίο πίεσης και ταχυτήτων. Η διαδικασία επαναλήψεων συνεχίζεται μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση της λύσης στο επίπεδο της ποθητής ακρίβειας.

Πρέπει να σημειωθεί ότι με η αγνόηση του τελευταίου όρου στο δεξιό μέλος της (19) μπορεί να οδηγήσει σε απόκλιση της επαναληπτικής μεθόδου. Αυτό το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με την χρήση υποχαλάρωσης (underrelaxation) στην διόρθωση της πίεσης ως

$$p^m = p^{m-1} + a_{ur} p', \quad 0 < a_{ur} < 1. \quad (21)$$

Η επίλυση των συστημάτων εξισώσεων (10), (11), (12) και (20) πραγματοποιείται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Stone (1968).

3. Ανάπτυξη Βοηθητικού Κώδικα Δημιουργίας Πλέγματος Επίλυσης

Η ανάπτυξη βοηθητικού κώδικα δημιουργίας πλέγματος επίλυσης έγκειται στην διακριτοποίηση του χώρου επίλυσης σε όγκους ελέγχου (OE) οι όποιοι είναι εξάεδρα στην περίπτωση τρισδιάστατων πλεγμάτων. Η αρίθμηση των κόμβων ενός τρισδιάστατου πλέγματος γίνεται με τους δείκτες I, J και K και ο κώδικας ουσιαστικά αντιστοιχεί μια τιμή (X, Y, Z) του φυσικού χώρου σε κάθε κόμβο (I, J, K) αρχίζοντας από τον κόμβο (I,J,K)=(1,1,1) και καταλήγοντας στον (I,J,K)=(IMAX,JMAX,KMAX)

Σε κάθε ένα από αυτούς τους όγκους εφαρμόζονται οι εξισώσεις διατήρησης όπως έχει προαναφερθεί. Το πλέγμα μπορεί να είναι ορθογώνιο ή καμπυλόγραμμο. Για ροές μέσα σε κλειστό σύνορο, το όριο του πλέγματος πρέπει να ταυτίζεται με το φυσικό όριο της γεωμετρίας (π.χ. τοιχώματα αγωγού) ενώ το εσωτερικό του δομείται ανάλογα με τις ανάγκες ή και δυνατότητες επίλυσης οι οποίες περιορίζονται από τον συνολικό αριθμό κόμβων καθώς και με τις περιοχές ενδιαφέροντος όπου προνοείται τύκνωση του πλέγματος.

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι επιθυμητή η κατασκευή πολυτμηματικών (multi-block) πλεγμάτων. Παράδειγμα αυτής της κατηγορίας είναι η περίπτωση αγωγού κυκλικής διατομής όπου για το εξωτερικό τμήμα του πλέγματος χρησιμοποιείται καμπυλόγραμμο πλέγμα ενώ για το εσωτερικό τμήμα χρησιμοποιείται ορθογώνιο πλέγμα. Σε αυτή την περίπτωση τα συστήματα των εξισώσεων (10), (11), (12) και (20) λαμβάνονται για κάθε τμήμα ξεχωριστά και η επίλυσή τους βασίζεται στο ότι στα εφαπτόμενα επίπεδα οι τιμές των μεταβλητών είναι ταυτόσημες και χρησιμοποιούνται σαν οριακές συνθήκες εκατέρωθεν.